

成都市 2017 级高中毕业班第二次诊断性检测

数学(理科)参考答案及评分意见

第 I 卷 (选择题,共 60 分)

一、选择题:(每小题 5 分,共 60 分)

1. C; 2. A; 3. B; 4. D; 5. C; 6. B; 7. B; 8. C; 9. A; 10. B; 11. D; 12. C.

第 II 卷 (非选择题,共 90 分)

二、填空题:(每小题 5 分,共 20 分)

13. 6; 14. $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 15. 36; 16. 0.

三、解答题:(共 70 分)

17. 解:(I) 设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q . 由题意及 $a_1=1$, 知 $q>1$.

$$\because 2a_2, \frac{3}{2}a_3, a_4 \text{ 成等差数列}, \therefore 3a_3 = a_4 + 2a_2.$$

$$\therefore 3q^2 = q^3 + 2q, \text{ 即 } q^2 - 3q + 2 = 0. \quad \dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{解得 } q=2 \text{ 或 } q=1(\text{舍去}). \quad \dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\therefore q=2. \quad \dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$\therefore \text{数列 } \{a_n\} \text{ 的通项公式为 } a_n = 2^{n-1}. \quad \dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$(II) \because b_n = \frac{1}{\log_2 a_{n+1} \cdot \log_2 a_{n+3}} = \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right), \quad \dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\therefore S_n = \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right) \quad \dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}. \quad \dots\dots 12 \text{ 分}$$

18. 解:(I) $\because ABCD$ 为正方形, $\therefore AC \perp BD$. $\dots\dots 1 \text{ 分}$

$\because PO \perp$ 平面 $ABCD, AC \subset$ 平面 $ABCD$,
 $\therefore PO \perp AC$. $\dots\dots 2 \text{ 分}$

$\because OP, BD \subset$ 平面 PBD , 且 $OP \cap BD = O$,
 $\therefore AC \perp$ 平面 PBD . $\dots\dots 4 \text{ 分}$

又 $AC \subset$ 平面 PAC , $\therefore$ 平面 $PAC \perp$ 平面 PBD . $\dots\dots 5 \text{ 分}$

(II) 取 AB 的中点 M , 连结 OM, OE .

$\because ABCD$ 是正方形, 易知 OM, OE, OP 两两垂直.

分别以 OM, OE, OP 所在直线为 x, y, z 轴建立如图所示的

空间直角坐标系 $Oxyz$. $\dots\dots 6 \text{ 分}$

在 $\text{Rt}\triangle POE$ 中, $\because OE=2, PE=3, \therefore PO=\sqrt{5}$.

$\therefore B(2,2,0), D(-2,-2,0), P(0,0,\sqrt{5}),$

$E(0,2,0).$

设平面 PBE 的一个法向量 $\mathbf{m}=(x_1, y_1, z_1),$

$\overrightarrow{BE}=(-2,0,0), \overrightarrow{PE}=(0,2,-\sqrt{5}).$

$$\text{由} \begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{BE}=0 \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{PE}=0 \end{cases}, \text{得} \begin{cases} x_1=0 \\ 2y_1-\sqrt{5}z_1=0 \end{cases}.$$

取 $\mathbf{m}=(0, \sqrt{5}, 2).$ 9 分

设平面 PDE 的一个法向量 $\mathbf{n}=(x_2, y_2, z_2),$

$\overrightarrow{DE}=(2,4,0), \overrightarrow{PE}=(0,2,-\sqrt{5}).$

$$\text{由} \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{DE}=0 \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{PE}=0 \end{cases}, \text{得} \begin{cases} 2x_2+4y_2=0 \\ 2y_2-\sqrt{5}z_2=0 \end{cases}. \text{取} \mathbf{n}=(-2\sqrt{5}, \sqrt{5}, 2).$$
10 分

$$\therefore \cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} = \frac{9}{3\sqrt{29}} = \frac{3\sqrt{29}}{29}. \quad \text{.....11 分}$$

$\therefore$ 二面角 $D-PE-B$ 为钝二面角,

$$\therefore \text{二面角 } D-PE-B \text{ 的余弦值为 } -\frac{3\sqrt{29}}{29}. \quad \text{.....12 分}$$

19. 解:(I) 根据表中数据, 计算可得 $\bar{x}=4, \bar{y}=43, \sum_{i=1}^7 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})=140.$ 3 分

$$\text{又} \sum_{i=1}^7 (x_i - \bar{x})^2 = 28, \therefore \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^7 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^7 (x_i - \bar{x})^2} = 5. \quad \text{.....5 分}$$

$$\therefore \hat{a} = \bar{y} - \hat{b} \bar{x}, \therefore \hat{a} = 43 - 5 \times 4 = 23. \quad \text{.....6 分}$$

$$\therefore y \text{ 关于 } x \text{ 的线性回归方程为 } \hat{y} = 5x + 23. \quad \text{.....7 分}$$

将 $x=8$ 代入, $\therefore \hat{y} = 5 \times 8 + 23 = 63$ (亿元).

$\therefore$ 该公司 2020 年的年利润的预测值为 63 亿元.8 分

(II) 由 (I) 可知 2013 年至 2020 年的年利润的估计值分别为 28, 33, 38, 43, 48, 53, 58, 63 (单位: 亿元). 其中实际利润大于相应估计值的有 3 年.

故这 8 年中被评为 A 级利润年的有 3 年, 评为 B 级利润年的有 5 年.10 分

记“从 2013 年至 2020 年这 8 年的年利润中随机抽取 2 年, 恰有 1 年为 A 级利润年”的概率为 P .

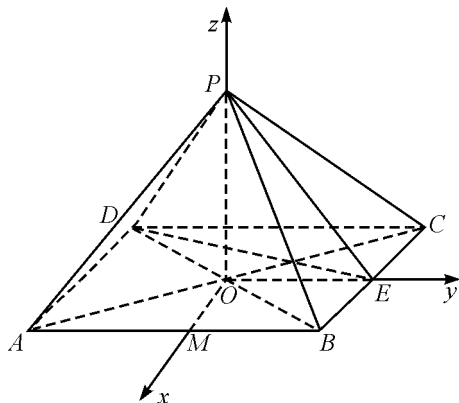
$$\therefore P = \frac{C_5^1 C_3^1}{C_8^2} = \frac{15}{28}. \quad \text{.....12 分}$$

20. 解:(I) $\because$ 点 P 在椭圆上, $\therefore |PF_1| + |PF_2| = 2a.$

$$\therefore |PF_1| = 3|PF_2|, \therefore |PF_2| = \frac{a}{2}, |PF_1| = \frac{3a}{2}. \quad \text{.....2 分}$$

$$\therefore PF_2 \perp F_1F_2, \therefore |PF_2|^2 + |F_1F_2|^2 = |PF_1|^2,$$

$$\text{又} |F_1F_2| = 2, \therefore a^2 = 2. \quad \text{.....3 分}$$



$$\because c=1, b^2=a^2-c^2. \therefore b^2=1.$$

$$\therefore \text{椭圆 } E \text{ 的标准方程为 } \frac{x^2}{2} + y^2 = 1. \quad \dots\dots 4 \text{ 分}$$

(II) 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$.

$$\text{联立 } \begin{cases} x=my+1 \\ x^2+2y^2=2 \end{cases}, \text{ 消去 } x, \text{ 得 } (m^2+2)y^2+2my-1=0.$$

$$\therefore \Delta=8m^2+8>0, y_1+y_2=-\frac{2m}{m^2+2}, y_1y_2=-\frac{1}{m^2+2}. \quad \dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\therefore |AB| = \sqrt{1+m^2} |y_1-y_2| = \frac{2\sqrt{2}(m^2+1)}{m^2+2}. \quad \dots\dots 7 \text{ 分}$$

设圆 $x^2+y^2=2$ 的圆心 O 到直线 l 的距离为 d , 则 $d = \frac{1}{\sqrt{m^2+1}}$.

$$\therefore |CD| = 2\sqrt{2-d^2} = 2\sqrt{\frac{2m^2+1}{m^2+1}}. \quad \dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\therefore |AB| \cdot |CD|^2 = 4 \cdot \frac{2m^2+1}{m^2+1} \cdot \frac{2\sqrt{2}(m^2+1)}{m^2+2} = \frac{8\sqrt{2}(2m^2+1)}{m^2+2} = 8\sqrt{2} \left(2 - \frac{3}{m^2+2}\right). \quad \dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\because 0 < \frac{3}{m^2+2} \leq \frac{3}{2}, \therefore \frac{1}{2} \leq 2 - \frac{3}{m^2+2} < 2. \quad \dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$\therefore 4\sqrt{2} \leq |AB| \cdot |CD|^2 < 16\sqrt{2}.$$

$$\therefore |AB| \cdot |CD|^2 \text{ 的取值范围为 } [4\sqrt{2}, 16\sqrt{2}). \quad \dots\dots 12 \text{ 分}$$

21. 解: (I) 当 $m>0$ 时, $f'(x) = 2x+2 - \frac{m}{x+1} = \frac{2(x+1)^2-m}{x+1}, x>-1.$ 1 分

$$\text{令 } f'(x)=0, \text{ 解得 } x_1 = -\frac{\sqrt{2m}}{2}-1 \text{ (舍去)}, x_2 = \frac{\sqrt{2m}}{2}-1. \quad \dots\dots 2 \text{ 分}$$

当 $x \in (-1, \frac{\sqrt{2m}}{2}-1)$ 时, $f'(x) < 0$. $\therefore f(x)$ 在 $(-1, \frac{\sqrt{2m}}{2}-1)$ 上单调递减;

当 $x \in (\frac{\sqrt{2m}}{2}-1, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$. $\therefore f(x)$ 在 $(\frac{\sqrt{2m}}{2}-1, +\infty)$ 上单调递增.

$\therefore f(x)$ 的单调递减区间为 $(-1, \frac{\sqrt{2m}}{2}-1)$, 单调递增区间为 $(\frac{\sqrt{2m}}{2}-1, +\infty)$.

.....4 分

(II) 由题意, 可知 $x^2+2x-m\ln(x+1) > \frac{1}{x+1} - \frac{1}{e^x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立.

(i) 若 $m \leq 0$, $\because \ln(x+1) > 0$, $\therefore -m\ln(x+1) \geq 0$.

$$\therefore x^2+2x-m\ln(x+1) - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{e^x} \geq x^2+2x - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{e^x}.$$

构造函数 $G(x) = x^2+2x - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{e^x}, x>0$. 则 $G'(x) = 2x+2 + \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{e^x}$.

$$\because x > 0, \therefore 0 < \frac{1}{e^x} < 1, \therefore -1 < -\frac{1}{e^x} < 0.$$

又 $\because 2x + 2 + \frac{1}{(x+1)^2} > 2x + 2 > 2, \therefore G'(x) > 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立.

$\therefore G(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增. $\therefore G(x) > G(0) = 0$.

$\therefore$ 当 $m \leq 0$ 时, $x^2 + 2x - m \ln(x+1) - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{e^x} > 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立.6 分

(ii) 若 $m > 0$, 构造函数 $H(x) = e^x - x - 1, x > 0$.

$\because H'(x) = e^x - 1 > 0, \therefore H(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

$\therefore H(x) > H(0) = 0$ 恒成立, 即 $e^x > x + 1 > 0$.

$$\therefore \frac{1}{x+1} > \frac{1}{e^x}, \text{ 即 } \frac{1}{x+1} - \frac{1}{e^x} > 0. \quad \dots\dots 7 \text{ 分}$$

由题意, 知 $f(x) > \frac{1}{x+1} - \frac{1}{e^x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立.

$\therefore f(x) = x^2 + 2x - m \ln(x+1) > 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立.

由 (I), 可知 $f(x)_{\text{最小值}} = f(x)_{\text{极小值}} = f(\frac{\sqrt{2m}}{2} - 1)$. 又 $\because f(0) = 0$,

当 $\frac{\sqrt{2m}}{2} - 1 > 0$, 即 $m > 2$ 时, $f(x)$ 在 $(0, \frac{\sqrt{2m}}{2} - 1)$ 上单调递减, $f(\frac{\sqrt{2m}}{2} - 1) < f(0) = 0$, 不合题意.

$$\therefore \frac{\sqrt{2m}}{2} - 1 \leq 0, \text{ 即 } 0 < m \leq 2. \quad \dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{此时 } g(x) - \frac{1}{x+1} = x^2 + 2x - m \ln(x+1) + \frac{1}{e^x} - \frac{1}{x+1} \geq x^2 + 2x - 2 \ln(x+1) + \frac{1}{e^x} - \frac{1}{x+1}.$$

构造函数 $P(x) = x^2 + 2x - 2 \ln(x+1) + \frac{1}{e^x} - \frac{1}{x+1}, x > 0$.

$$\therefore P'(x) = 2x + 2 - \frac{2}{x+1} - \frac{1}{e^x} + \frac{1}{(x+1)^2}. \quad \dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\because -\frac{1}{e^x} > -\frac{1}{x+1}, x+1 > 1,$$

$$\begin{aligned} \therefore P'(x) &> 2x + 2 - \frac{3}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{2(x+1)^3 - 3(x+1) + 1}{(x+1)^2} \\ &> \frac{2(x+1)^2 - 3(x+1) + 1}{(x+1)^2} = \frac{x(2x+1)}{(x+1)^2} > 0. \end{aligned}$$

$\therefore P'(x) > 0$ 恒成立. $\therefore P(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增. $\therefore P(x) > P(0) = 0$ 恒成立.

综上, 实数 m 的最大值为 2.12 分

22. 解: (I) 由 $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$, 可得直线 l 的直角坐标方程为 $x - y - 1 = 0$2 分

由曲线 C 的参数方程, 消去参数 m , 可得曲线 C 的普通方程为 $y^2 = 4x$4 分

(II) 易知点 $P(2, 1)$ 在直线 l 上, 直线 l 的参数方程为
$$\begin{cases} x = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}t, \\ y = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases} \quad (t \text{ 为参数}).$$
6 分

将直线 l 的参数方程代入曲线 C 的普通方程, 并整理得 $t^2 - 2\sqrt{2}t - 14 = 0$(*)

设 t_1, t_2 是方程 (*) 的两根, 则有 $t_1 + t_2 = 2\sqrt{2}, t_1 t_2 = -14$7 分

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{|PM|} + \frac{1}{|PN|} &= \frac{1}{|t_1|} + \frac{1}{|t_2|} = \frac{|t_1| + |t_2|}{|t_1| |t_2|} = \frac{|t_1 - t_2|}{|t_1 t_2|} = \frac{\sqrt{(t_1 + t_2)^2 - 4t_1 t_2}}{|t_1 t_2|} \\ &= \frac{\sqrt{(2\sqrt{2})^2 + 4 \times 14}}{14} = \frac{4}{7}. \end{aligned} \quad \text{.....10 分}$$

23. 解: (I) 原不等式即 $|x - 1| + |x + 3| \geq 6$.

① 当 $x \geq 1$ 时, 化简得 $2x + 2 \geq 6$. 解得 $x \geq 2$;

② 当 $-3 < x < 1$ 时, 化简得 $4 \geq 6$. 此时无解;

③ 当 $x \leq -3$ 时, 化简得 $-2x - 2 \geq 6$. 解得 $x \leq -4$.

综上, 原不等式的解集为 $(-\infty, -4] \cup [2, +\infty)$ 4 分

(II) 由题意 $f(x) = \begin{cases} 2x + 2, & x \geq 1 \\ 4, & 0 < x < 1 \end{cases}$. 设方程 $f(x) = g(x)$ 两根为 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$.

① 当 $x_2 > x_1 \geq 1$ 时, 方程 $-x^2 + 2ax = 2x + 2$ 等价于方程 $2a = x + \frac{2}{x} + 2$.

易知当 $a \in (\sqrt{2} + 1, \frac{5}{2}]$, 方程 $2a = x + \frac{2}{x} + 2$ 在 $(1, +\infty)$ 上有两个不相等的实数根.

此时方程 $-x^2 + 2ax = 4$ 在 $(0, 1)$ 上无解. $\therefore a \in (\sqrt{2} + 1, \frac{5}{2}]$ 满足条件.6 分

② 当 $0 < x_1 < x_2 < 1$ 时, 方程 $-x^2 + 2ax = 4$ 等价于方程 $2a = x + \frac{4}{x}$.

此时方程 $2a = x + \frac{4}{x}$ 在 $(0, 1)$ 上显然没有两个不相等的实数根.7 分

③ 当 $0 < x_1 < 1 \leq x_2$ 时, 易知当 $a \in (\frac{5}{2}, +\infty)$, 方程 $2a = x + \frac{4}{x}$ 在 $(0, 1)$ 上有且只有一个实数根.

此时方程 $-x^2 + 2ax = 2x + 2$ 在 $[1, +\infty)$ 上也有一个实数根.

$\therefore a \in (\frac{5}{2}, +\infty)$ 满足条件.9 分

综上, 实数 a 的取值范围为 $(\sqrt{2} + 1, +\infty)$10 分