绵阳市高中2017级第二次诊断性考试

文科数学参考答案及评分意见

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．

DAACB　ACBBD　AD

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13．2　　14．30.8　　15．$\dfrac{2\pi}{3}$　　16．3

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分．

17．解：（1）由题意得，直方图中第一组，第二组的频率之和为

$0.04\times5+0.06\times5=0.5$．

所以阅读时间的中位数 $m=10$．…………………………………………………4 分

（2）由题意得，男生人数为 45 人，因此女生人数为 55 人，由频率分布直方图知，阅读时长大于等于 m 的人数为 $100\times0.5=50$ 人，

故列联表补充如下：　………………………8 分

	男	女	总计
$t\geqslant m$	25	25	50
$t<m$	20	30	50
总计	45	55	100

K^2 的观测值 $k=\dfrac{100\times(25\times30-25\times20)^2}{50\times50\times45\times55}=\dfrac{100}{99}$

$\approx1.01<2.706$，所以不能在犯错误的概率不超过 0.1 的前提下认为阅读与性别有关．　……12 分

18．解：（1）由题意得 $a_4=a_1+3d=a_1+6$，$a_7=a_1+6d=a_1+12$．

∴ $(-3\sqrt{3})^2=(a_1+6)\cdot(a_1+12)$，解得 $a_1=-3$ 或 $a_1=-15$．　……………………4 分

又 $a_3=a_1+2\times2>0$，得 $a_1>-4$，故 $a_1=-3$．

∴ $a_n=-3+2\cdot(n-1)=2n-5$．

∴ $b_n=2^{a_n+3}=2^{2n-2}$．……………………………………………………………7 分

（2）由（1）可知，$c_n=a_n+\sqrt{b_n}=2n-5+2^{n-1}$．………………………………8 分

$S_n=c_1+c_2+\cdots+c_n$

$=\left[-3-1+1+\cdots+(2n-5)\right]+\dfrac{1-2^n}{1-2}$

$=\dfrac{n(-3+2n-5)}{2}+2^n-1$

$=2^n+n^2-4n-1$．　……………………………………………………12 分

19．解：（1）在△ABC中，由正弦定理得

$(a+b)(a-b)=c(c+b)$，即 $a^2=b^2+c^2+bc$． ……………………………………3 分

由余弦定理得 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=-\dfrac{1}{2}$， ……………………………………5 分

结合 $0<A<\pi$，可知 $A=\dfrac{2\pi}{3}$． ………………………………………………6 分

（2）在△ABC中，$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}AB\cdot AC\sin\angle BAC=\dfrac{1}{2}BC\cdot AD$，即 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}bc=a\cdot AD$．

由已知 $BC=2\sqrt{3}AD$，可得 $AD=\dfrac{a}{2\sqrt{3}}$．

∴ $3bc=a^2$． ……………………………………………………………………9 分

在△ABC中，由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos120^\circ$，

即 $3bc=b^2+c^2+bc$，整理得 $(b-c)^2=0$，即 $b=c$，

∴ $A=B=\dfrac{\pi}{6}$．

∴ $\sin B=\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}$． ………………………………………………………12 分

20．解：（1）设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，直线 AB：$x=ty+2$．

由 $\begin{cases}x=ty+2,\\x^2+2y^2=2,\end{cases}$ 消去 x 得 $(t^2+2)y^2+4ty+2=0$．

$\Delta=t^2-2>0$，解得 $t>\sqrt{2}$ 或 $t<-\sqrt{2}$．

由韦达定理得 $y_1+y_2=\dfrac{-4t}{t^2+2}$，$y_1y_2=\dfrac{2}{t^2+2}$．　① ……………………………3 分

∵ AB中点Q的纵坐标是 $-\dfrac{2}{3}$，

∴ $y_1+y_2=-\dfrac{4}{3}$，代入①解得 $t=1$ 或 $t=2$．

又 $t>\sqrt{2}$ 或 $t<-\sqrt{2}$，得 $t=2$．

∴ 直线 l 的方程为 $x-2y-2=0$． ………………………………………………6 分

（2）由题意得 $M(x_1, -y_1)$.

由 $\overrightarrow{MN}=\lambda\overrightarrow{NB}$，知 M，N，B 三点共线，

即 $k_{MN}=k_{MB}$.

$\therefore \dfrac{0-(-y_1)}{n-x_1}=\dfrac{y_2-(-y_1)}{x_2-x_1}$，

即 $\dfrac{y_1}{n-x_1}=\dfrac{y_2+y_1}{x_2-x_1}$，

解得 $n=\dfrac{y_1(x_2-x_1)}{y_2+y_1}+x_1$. ……………………………………………………9 分

将 $x_1=ty_1+2$，$x_2=ty_2+2$，代入得 $n=\dfrac{2ty_1y_2}{y_1+y_2}+2$. ②

联立 $\begin{cases}x^2+2y^2-2=0,\\ x=ty+2,\end{cases}$ 消去 x 得 $(t^2+2)y^2+4ty+2=0$，

由韦达定理得 $y_1+y_2=\dfrac{-4t}{t^2+2}$，$y_1y_2=\dfrac{2}{t^2+2}$. ③ ……………………………11 分

将③代入②得到 $n=1$. ……………………………………………………………12 分

21．**解**：（1） $f'(x)=\dfrac{2}{x}+x-a=\dfrac{x^2-ax+2}{x}\ (x>0)$. ………………………………2 分

令 $g(x)=x^2-ax+2$，则 $\Delta=a^2-8$.

① 当 $a\leqslant 0$ 或 $\Delta\leqslant 0$，即 $a\leqslant 2\sqrt{2}$ 时，得 $f'(x)\geqslant 0$ 恒成立，

$\therefore f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. ……………………………………………………3 分

②当 $\begin{cases}a>0,\\ \Delta>0,\end{cases}$ 即 $a>2\sqrt{2}$ 时，

由 $f'(x)>0$，得 $0<x<\dfrac{a-\sqrt{a^2-8}}{2}$ 或 $x>\dfrac{a+\sqrt{a^2+8}}{2}$；

由 $f'(x)<0$，得 $\dfrac{a-\sqrt{a^2-8}}{2}<x<\dfrac{a+\sqrt{a^2-8}}{2}$.

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $(0,\dfrac{a-\sqrt{a^2-8}}{2})$ 和 $(\dfrac{a+\sqrt{a^2+8}}{2},+\infty)$ 上单调递增，

在 $(\dfrac{a-\sqrt{a^2-8}}{2},\dfrac{a+\sqrt{a^2-8}}{2})$ 上单调递减. …………………………5 分

综上所述，当 $a\leqslant 2\sqrt{2}$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

当 $a>2\sqrt{2}$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(0,\dfrac{a-\sqrt{a^2-8}}{2})$ 和 $(\dfrac{a+\sqrt{a^2+8}}{2},+\infty)$ 上单调递增，

在 $(\dfrac{a-\sqrt{a^2-8}}{2},\dfrac{a+\sqrt{a^2-8}}{2})$ 上单调递减． …………6 分

（2）由（1）得，当 $a>2\sqrt{2}$ 时，$f(x)$ 有两极值点 x_1，x_2 (其中 $x_2>x_1$)．

则 x_1，x_2 为 $g(x)=x^2-ax+2=0$ 的两根，

∴ $x_1+x_2=a$，$x_1x_2=2$．

$$f(x_2)-f(x_1)=2\ln\frac{x_2}{x_1}+\frac{1}{2}({x_2}^2-{x_1}^2)-a(x_2-x_1)$$

$$=2\ln\frac{x_2}{x_1}-\frac{{x_2}^2-{x_1}^2}{2}=2\ln\frac{x_2}{x_1}-\frac{{x_2}^2-{x_1}^2}{x_1x_2}$$

$$=2\ln\frac{x_2}{x_1}-\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_1}{x_2}.$$ ……………………………………………8 分

令 $t=\dfrac{x_2}{x_1}$（$t>1$），

则 $f(x_2)-f(x_1)=h(t)=2\ln t-t+\dfrac{1}{t}$．

由 $a\geqslant 3$，得 $\dfrac{a^2}{2}=\dfrac{(x_1+x_2)^2}{x_1x_2}=t+\dfrac{1}{t}+2\geqslant\dfrac{9}{2}$，

即 $2t^2-5t+2\geqslant 0$，解得 $t\geqslant 2$．

∵ $h'(t)=\dfrac{2}{t}-1-\dfrac{1}{t^2}=\dfrac{-t^2+2t-1}{t^2}=\dfrac{-(t-1)^2}{t^2}<0$，

∴ $h(t)$ 在 $[2,+\infty)$ 上单调递减，

∴ $h_{\max}(t)=h(2)=2\ln 2-\dfrac{3}{2}$．

即 $f(x_2)-f(x_1)$ 的最大值为 $2\ln 2-\dfrac{3}{2}$． ……………………………………12 分

22．**解**：（1）将 C_1 的参数方程化为普通方程为$(x-1)^2+y^2=r^2$．

由 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$，

得点 $P(2,\dfrac{\pi}{3})$的直角坐标为$(1,\sqrt{3})$，代入 C_1，得 $r^2=3$，

∴ 曲线 C_1 的普通方程为$(x-1)^2+y^2=3$． ……………………………………3 分

C_2 可化为 $\rho^2\cos^2\theta-\rho^2\sin^2\theta=1$，即 $\rho^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)=1$

∴ 曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho^2\cos 2\theta=1$. ……………………………………5 分

（2）将点 $A(\rho_1,\alpha)$，$B(\rho_2,\alpha-\dfrac{\pi}{6})$ 代入曲线 C_2 的极坐标方程，

得 $\rho_1^{\ 2}\cos 2\alpha=1$，$\rho_2^{\ 2}\cos(2\alpha-\dfrac{\pi}{3})=1$，

∴ $\dfrac{1}{|OA|^2}+\dfrac{1}{|OB|^2}=\dfrac{1}{\rho_1^{\ 2}}+\dfrac{1}{\rho_2^{\ 2}}=\cos 2\alpha+\cos(2\alpha-\dfrac{\pi}{3})$

$=\dfrac{3}{2}\cos 2\alpha+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\alpha=\sqrt{3}\sin(2\alpha+\dfrac{\pi}{3})$. ……………………8 分

由已知 $\alpha\in(0,\dfrac{\pi}{4})$，可得 $2\alpha+\dfrac{\pi}{3}\in(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{5\pi}{6})$，

于是 $\sqrt{3}\sin(2\alpha+\dfrac{\pi}{3})\in(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\sqrt{3}]$.

所以 $\dfrac{1}{|OA|^2}+\dfrac{1}{|OB|^2}$ 的取值范围是$(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\sqrt{3}]$. ……………………………10 分

23．**解：**（1）由 $a=4$ 时，$\log_{\frac{1}{2}}a=-2$．原不等式化为 $|x+1|-|2x-1|\leqslant -2$，

当 $x\geqslant\dfrac{1}{2}$ 时，$x+1-(2x-1)\leqslant-2$，解得 $x\geqslant4$，综合得 $x\geqslant4$； ………………3 分

当 $-1<x<\dfrac{1}{2}$ 时，$x+1+2x-1\leqslant-2$，解得 $x\leqslant-\dfrac{2}{3}$，综合得 $-1<x\leqslant-\dfrac{2}{3}$；

当 $x\leqslant-1$ 时，$-(x+1)+2x-1\leqslant-2$，解得 $x\leqslant0$，综合得 $x\leqslant-1$. ………… 4 分

∴不等式的解集为 $\{x|\ x\leqslant-\dfrac{2}{3}$，或 $x\geqslant4\}$. ……………………………………6 分

（2）设函数 $f(x)=|x+1|-|2x-1|=\begin{cases}x-2, & x<-1,\\ 3x, & -1\leqslant x<\dfrac{1}{2},\\ -x+2. & x\geqslant\dfrac{1}{2},\end{cases}$

画图可知，函数 $f(x)$的最大值为 $\dfrac{3}{2}$.

由 $\dfrac{3}{2}\leqslant\log_{\frac{1}{2}}a$，解得 $0<a\leqslant\dfrac{\sqrt{2}}{4}$. ……………………………………10 分