绵阳市高中 2017 级第二次诊断性考试
理科数学参考答案及评分意见

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．

DCABB　ADBCD　AD

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13．2　　14．3.12　　15．$\dfrac{2\pi}{3}$　　16．8

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分．

17．解：（1）由题意得，直方图中第一组，第二组的频率之和为

$0.04\times5+0.06\times5=0.5$．

所以阅读时间的中位数 $m=10$．……………………………………………4 分

（2）由题意得，男生人数为 45 人，因此女生人数为 55 人，阅读时长大于等于 m 的人数为 $100\times0.5=50$ 人，

故列联表为如右图：　………………………8 分

	男	女	总计
$t\geqslant m$	25	25	50
$t<m$	20	30	50
总计	45	55	100

K^2 的观测值 $k=\dfrac{100\times(25\times30-25\times20)^2}{50\times50\times45\times55}=\dfrac{100}{99}$

$\approx1.01<2.706$，

所以不能在犯错误的概率不超过 0.1 的前提下认为阅读与性别有关．……12 分

18．解：（1）设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d，等比数列$\{b_n\}$的公比为 q．

由题意，得$\begin{cases}2a_1+d=0,\\6a_1+\dfrac{6\times5}{2}d=24.\end{cases}$　解得$\begin{cases}a_1=-1,\\d=2.\end{cases}$

∴　$a_n=2n-3$．………………………………………………………………4 分

∵　等比数列$\{b_n\}$的各项均为正数，

由$\begin{cases}b_1+b_1q=6,\\b_1q^2=8.\end{cases}$解得$\begin{cases}b_1=2,\\q_1=2.\end{cases}$或$\begin{cases}b_1=18,\\q_2=-\dfrac{2}{3}.\end{cases}$（舍）

∴　$b_n=2\times2^{n-1}=2^n$．……………………………………………………7 分

（2）由（1）得，$1+b_1+b_2+\cdots+b_{n-1}=1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$．　………………9 分

$T_n=1+(1+b_1)+(1+b_1+b_2)+\cdots+(1+b_1+b_2+\cdots+b_{n-1})$

$=1+(2^2-1)+(2^3-1)+\cdots+(2^n-1)=(2^1-1)+(2^2-1)+(2^3-1)+\cdots+(2^n-1)$

$=\dfrac{2(1-2^n)}{1-2}-n=2^{n+1}-n-2$．　……………………………12 分

19．解：（1）在$\triangle ABC$中，由正弦定理得

$(a+b)(a-b)=c(c+b)$，即$a^2=b^2+c^2+bc$．……………………………………3分

由余弦定理得$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=-\dfrac{1}{2}$，……………………………………5分

结合$0<A<\pi$，可知$A=\dfrac{2\pi}{3}$．……………………………………………………6分

（2）在$\triangle ABC$中，$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}AB\cdot AC\sin\angle BAC=\dfrac{1}{2}BC\cdot AD$，即$\dfrac{\sqrt{3}}{2}bc=a\cdot AD$．

由已知$BC=2\sqrt{3}AD$，可得$AD=\dfrac{a}{2\sqrt{3}}$．

∴ $3bc=a^2$．……………………………………………………………………9分

在$\triangle ABC$中，由余弦定理得$a^2=b^2+c^2-2bc\cos120^\circ$，

即$3bc=b^2+c^2+bc$，整理得$(b-c)^2=0$，即$b=c$，

∴ $A=B=\dfrac{\pi}{6}$．

∴ $\sin B=\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}$．………………………………………………………12分

20．解：（1）设$A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$．
由$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OP}=\mathbf{0}$，且点$P(-1，1)$，得$x_1+x_2=1$，$y_1+y_2=-1$．①

∴ 线段AB的中点坐标为$(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2})$，其在椭圆内．…………………………2分

由$\begin{cases}\dfrac{x_2^2}{2}+y_2^2=1,\\ \dfrac{x_1^2}{2}+y_1^2=1,\end{cases}$ 两式相减得$\dfrac{x_2^2-x_1^2}{2}+y_2^2-y_1^2=0$，

整理得$\dfrac{y_2^2-y_1^2}{x_2^2-x_1^2}=-\dfrac{1}{2}$，即$\dfrac{(y_2+y_1)(y_2-y_1)}{(x_2+x_1)(x_2-x_1)}=-\dfrac{1}{2}$．

将①代入，得$k_{AB}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{1}{2}$．

∴ 直线AB方程为$y-(-\dfrac{1}{2})=\dfrac{1}{2}(x-\dfrac{1}{2})$，即$2x-4y-3=0$．…………………4分

联立$\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}+y^2=1,\\ 2x-4y-3=0,\end{cases}$ 消去 x 得 $24y^2+24y+1=0$，

由韦达定理得 $y_1+y_2=-1$，$y_1y_2=\dfrac{1}{24}$.

∴ $|AB|=\sqrt{1+\dfrac{1}{k^2}}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\dfrac{5\sqrt{6}}{6}$. ……………………………………6 分

（2）设直线 AB 的方程为 $x=ty+2$．由题意得 $M(x_1, -y_1)$.

由已知 $\overrightarrow{MN}=\lambda\overrightarrow{NB}$，可知 M，N，B 三点共线，即 $k_{MN}=k_{MB}$.

∴ $\dfrac{0-(-y_1)}{n-x_1}=\dfrac{y_2-(-y_1)}{x_2-x_1}$，即 $\dfrac{y_1}{n-x_1}=\dfrac{y_2+y_1}{x_2-x_1}$，

解得 $n=\dfrac{y_1(x_2-x_1)}{y_2+y_1}+x_1$. ……………………………………………………………9 分

将 $x_1=ty_1+2$，$x_2=ty_2+2$，代入得 $n=\dfrac{2ty_1y_2}{y_1+y_2}+2$．②

联立$\begin{cases}x^2+2y^2-2=0,\\ x=ty+2,\end{cases}$ 消去 x 得$(t^2+2)y^2+4ty+2=0$，

由韦达定理得 $y_1+y_2=\dfrac{-4t}{t^2+2}$，$y_1y_2=\dfrac{2}{t^2+2}$. ③ ……………………………11 分

将③代入②得到 $n=1$. ……………………………………………………………12 分

21．**解**：（1）$f'(x)=\dfrac{2}{x}+x-a=\dfrac{x^2-ax+2}{x}$ $(x>0)$. ……………………………2 分

令 $g(x)=x^2-ax+2$，则 $\Delta=a^2-8$.

① 当 $a\leqslant 0$ 或$\Delta\leqslant 0$，即 $a\leqslant 2\sqrt{2}$ 时，得 $f'(x)\geqslant 0$ 恒成立，

∴ $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. ……………………………………………………3 分

②当$\begin{cases}a>0,\\ \Delta>0,\end{cases}$ 即 $a>2\sqrt{2}$ 时，

由 $f'(x)>0$，得 $0<x<\dfrac{a-\sqrt{a^2-8}}{2}$ 或 $x>\dfrac{a+\sqrt{a^2+8}}{2}$；

由 $f'(x)<0$，得 $\dfrac{a-\sqrt{a^2-8}}{2}<x<\dfrac{a+\sqrt{a^2-8}}{2}$.

∴ 函数 $f(x)$ 在 $(0,\dfrac{a-\sqrt{a^2-8}}{2})$ 和 $(\dfrac{a+\sqrt{a^2+8}}{2},+\infty)$ 上单调递增，

在 $(\dfrac{a-\sqrt{a^2-8}}{2},\dfrac{a+\sqrt{a^2-8}}{2})$ 上单调递减. ………………………………5 分

综上所述，当 $a\leqslant 2\sqrt{2}$ 时， $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；当 $a>2\sqrt{2}$ 时， $f(x)$ 在 $(0,\frac{a-\sqrt{a^2-8}}{2})$ 和 $(\frac{a+\sqrt{a^2+8}}{2},+\infty)$ 上单调递增，在 $(\frac{a-\sqrt{a^2-8}}{2},\frac{a+\sqrt{a^2-8}}{2})$ 上单调递减. ……………………………………………………………………6 分

（2）由（1）知，当 $a>2\sqrt{2}$ 时， $f(x)$ 有两极值点 x_1，x_2(其中 $x_2>x_1$)，

由（1）得 x_1，x_2 为 $g(x)=x^2-ax+2=0$ 的两根，

于是 $x_1+x_2=a$， $x_1x_2=2$.

$$\therefore\quad f(x_2)-f(x_1)=2\ln\frac{x_2}{x_1}+\frac{1}{2}({x_2}^2-{x_1}^2)-a(x_2-x_1)$$

$$=2\ln\frac{x_2}{x_1}-\frac{{x_2}^2-{x_1}^2}{2}=2\ln\frac{x_2}{x_1}-\frac{{x_2}^2-{x_1}^2}{x_1x_2}$$

$$=2\ln\frac{x_2}{x_1}-\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_1}{x_2}.$$ ……………………………………………7 分

令 $t=\frac{x_2}{x_1}$（$t>1$），则 $f(x_2)-f(x_1)=h(t)=2\ln t-t+\frac{1}{t}$.

$$\because\quad h'(t)=\frac{2}{t}-1-\frac{1}{t^2}=\frac{-t^2+2t-1}{t^2}=\frac{-(t-1)^2}{t^2}<0,$$

∴ $h(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减. ……………………………………………………9 分

由已知 $h(t)=f(x_2)-f(x_1)$ 的最大值为 $2\ln 2-\frac{3}{2}$，

而 $h(2)=2\ln 2-2+\frac{1}{2}=2\ln 2-\frac{3}{2}$.

∴ $t=2$. ……………………………………………………………………………10 分

设 t 的取值集合为 T，则只要满足 $T\subseteq[2,+\infty)$ 且 T 中的最小元素为 2 的 T 集合均符合题意.

又 $\frac{a^2}{2}=\frac{(x_1+x_2)^2}{x_1x_2}=t+\frac{1}{t}+2\,(t\in \mathrm{T})$，易知 $\varphi(x)=t+\frac{1}{t}+2$ 在 $[2,+\infty)$ 上单调递增，

结合 $a>2\sqrt{2}$，可得 a 与 t 是一一对应关系.

而当 $t=2$，即 $\frac{x_2}{x_1}=2$ 时，联合 $x_1x_2=2$，解得 $x_2=2$，$x_1=1$，进而可得 $a=3$.

∴ 实数 a 的取值范围为 $[3,+\infty)$ 或 $[3,+\infty)$ 的任意最小元素为 3 的子集.

……………………………………………………………………………12 分

22．**解**：（1）将 C_1 的参数方程化为普通方程为$(x-1)^2+y^2=r^2$．

由 $x=\rho\cos\theta$， $y=\rho\sin\theta$，

得点 $P(2，\dfrac{\pi}{3})$的直角坐标为$(1，\sqrt{3})$，代入 C_1，得 $r^2=3$，

∴ 曲线 C_1 的普通方程为$(x-1)^2+y^2=3$．…………………………………………3 分

C_2 可化为 $\rho^2\cos^2\theta-\rho^2\sin^2\theta=1$，即 $\rho^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)=1$

∴ 曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho^2\cos 2\theta=1$．…………………………………………5 分

（2）将点 $A(\rho_1，\alpha)$， $B(\rho_2，\alpha-\dfrac{\pi}{6})$ 代入曲线 C_2 的极坐标方程，

得 $\rho_1^{\ 2}\cos 2\alpha=1$， $\rho_2^{\ 2}\cos(2\alpha-\dfrac{\pi}{3})=1$，

$$\therefore\ \frac{1}{|OA|^2}+\frac{1}{|OB|^2}=\frac{1}{\rho_1^{\ 2}}+\frac{1}{\rho_2^{\ 2}}=\cos 2\alpha+\cos(2\alpha-\frac{\pi}{3})$$

$$=\frac{3}{2}\cos 2\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\alpha=\sqrt{3}\sin(2\alpha+\frac{\pi}{3})\ .$$ ………………………8 分

由已知 $\alpha\in(0,\dfrac{\pi}{4})$，可得 $2\alpha+\dfrac{\pi}{3}\in(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{5\pi}{6})$，于是 $\sqrt{3}\sin(2\alpha+\dfrac{\pi}{3})\in(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\sqrt{3}]$．

所以 $\dfrac{1}{|OA|^2}+\dfrac{1}{|OB|^2}$ 的取值范围是$(\dfrac{\sqrt{3}}{2}，\sqrt{3}]$． …………………………………10 分

23．**解**：（1）由 a=4 时， $\log_{\frac{1}{2}}a=-2$．原不等式化为$|x+1|-|2x-1|\leqslant -2$，

当 $x\geqslant\dfrac{1}{2}$ 时，$x+1-(2x-1)\leqslant-2$，解得 $x\geqslant4$，综合得 $x\geqslant4$； ………………3 分

当$-1<x<\dfrac{1}{2}$ 时， $x+1+2x-1\leqslant-2$，解得 $x\leqslant-\dfrac{2}{3}$，综合得 $-1<x\leqslant-\dfrac{2}{3}$；

当 $x\leqslant-1$ 时， $-(x+1)+2x-1\leqslant-2$，解得 $x\leqslant0$，综合得 $x\leqslant-1$． ………… 4 分

∴不等式的解集为$\{x|\ x\leqslant-\dfrac{2}{3}$，或 $x\geqslant4\}$．…………………………………………6 分

（2）设函数 $f(x)=|x+1|-|2x-1|=\begin{cases}x-2,\ x<-1,\\ 3x,-1\leqslant x<\dfrac{1}{2},\\ -x+2.x\geqslant\dfrac{1}{2},\end{cases}$

画图可知，函数 $f(x)$的最大值为 $\dfrac{3}{2}$．

由 $\dfrac{3}{2}\leqslant\log_{\frac{1}{2}}a$，解得 $0<a\leqslant\dfrac{\sqrt{2}}{4}$． ………………………………………………10 分