

数 学(理科)

本试卷分选择题和非选择题两部分。第 I 卷(选择题)1 至 2 页,第 II 卷(非选择题)3 至 4 页,共 4 页,满分 150 分,考试时间 120 分钟。

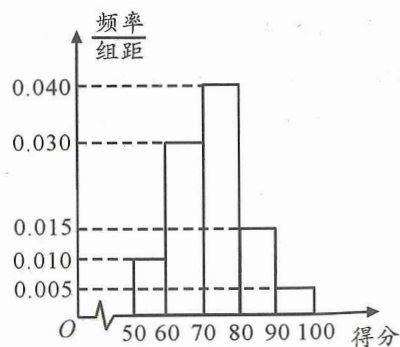
注意事项:

1. 答题前,务必将自己的姓名、考籍号填写在答题卡规定的位置上。
2. 答选择题时,必须使用 2B 铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑,如需改动,用橡皮擦擦干净后,再选涂其它答案标号。
3. 答非选择题时,必须使用 0.5 毫米黑色签字笔,将答案书写在答题卡规定的位置上。
4. 所有题目必须在答题卡上作答,在试题卷上答题无效。
5. 考试结束后,只将答题卡交回。

第 I 卷 (选择题,共 60 分)

一、选择题:本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 若复数 z_1 与 $z_2 = -3 - i$ (i 为虚数单位)在复平面内对应的点关于实轴对称,则 $z_1 =$
(A) $-3 - i$ (B) $-3 + i$ (C) $3 + i$ (D) $3 - i$
2. 已知集合 $A = \{-1, 0, m\}$, $B = \{1, 2\}$. 若 $A \cup B = \{-1, 0, 1, 2\}$, 则实数 m 的值为
(A) -1 或 0 (B) 0 或 1 (C) -1 或 2 (D) 1 或 2
3. 若 $\sin \theta = \sqrt{5} \cos(2\pi - \theta)$, 则 $\tan 2\theta =$
(A) $-\frac{\sqrt{5}}{3}$ (B) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ (C) $-\frac{\sqrt{5}}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{5}}{2}$
4. 某校随机抽取 100 名同学进行“垃圾分类”的问卷测试,测试结果发现这 100 名同学的得分都在 $[50, 100]$ 内,按得分分成 5 组: $[50, 60)$, $[60, 70)$, $[70, 80)$, $[80, 90)$, $[90, 100]$, 得到如图所示的频率分布直方图。则这 100 名同学的得分的中位数为
(A) 72.5 (B) 75 (C) 77.5 (D) 80



5. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $a_n \neq 0$. 若 $a_5 = 3a_3$, 则 $\frac{S_9}{S_5} =$
(A) $\frac{9}{5}$ (B) $\frac{5}{9}$ (C) $\frac{5}{3}$ (D) $\frac{27}{5}$

6. 已知 α, β 是空间中两个不同的平面, m, n 是空间中两条不同的直线, 则下列说法正确的是
(A) 若 $m \parallel \alpha, n \parallel \beta$, 且 $\alpha \parallel \beta$, 则 $m \parallel n$
(B) 若 $m \parallel \alpha, n \parallel \beta$, 且 $\alpha \perp \beta$, 则 $m \parallel n$
(C) 若 $m \perp \alpha, n \parallel \beta$, 且 $\alpha \parallel \beta$, 则 $m \perp n$
(D) 若 $m \perp \alpha, n \parallel \beta$, 且 $\alpha \perp \beta$, 则 $m \perp n$

7. $(x^2 + 2)(x - \frac{1}{x})^6$ 的展开式的常数项为

(A) 25 (B) -25 (C) 5 (D) -5

8. 将函数 $y = \sin(4x - \frac{\pi}{6})$ 图象上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍(纵坐标不变), 再把所得图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 得到函数 $f(x)$ 的图象, 则函数 $f(x)$ 的解析式为

(A) $f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{6})$ (B) $f(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{3})$

(C) $f(x) = \sin(8x + \frac{\pi}{6})$ (D) $f(x) = \sin(8x - \frac{\pi}{3})$

9. 已知抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点为 F , M, N 是抛物线上两个不同的点. 若 $|MF| + |NF| = 5$, 则线段 MN 的中点到 y 轴的距离为

(A) 3 (B) $\frac{3}{2}$ (C) 5 (D) $\frac{5}{2}$

10. 已知 $a = 2^{\frac{1}{2}}, b = 3^{\frac{1}{3}}, c = \ln \frac{3}{2}$, 则

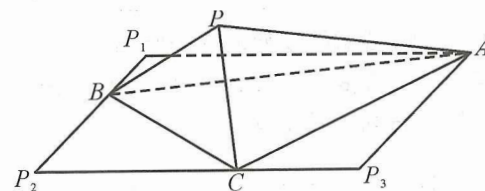
(A) $a > b > c$ (B) $a > c > b$ (C) $b > a > c$ (D) $b > c > a$

11. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(2-x) = f(2+x)$, 当 $x \leq 2$ 时, $f(x) = (x-1)e^x - 1$. 若关于 x 的方程 $f(x) - kx + 2k - e + 1 = 0$ 有三个不相等的实数根, 则实数 k 的取值范围是

(A) $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$ (B) $(-2, 0) \cup (0, 2)$
(C) $(-e, 0) \cup (e, +\infty)$ (D) $(-e, 0) \cup (0, e)$

12. 如图, 在边长为 2 的正方形 $AP_1P_2P_3$ 中, 线段 BC 的端点 B, C 分别在边 P_1P_2, P_2P_3 上滑动, 且 $P_2B = P_2C = x$. 现将 $\triangle AP_1B, \triangle AP_3C$ 分别沿 AB, AC 折起使点 P_1, P_3 重合, 重合后记为点 P , 得到三棱锥 $P-ABC$. 现有以下结论:

- ① $AP \perp$ 平面 PBC ;
- ② 当 B, C 分别为 P_1P_2, P_2P_3 的中点时, 三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的表面积为 6π ;
- ③ x 的取值范围为 $(0, 4 - 2\sqrt{2})$;
- ④ 三棱锥 $P-ABC$ 体积的最大值为 $\frac{1}{3}$.



则正确的结论的个数为

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

第 II 卷 (非选择题, 共 90 分)

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 把答案填在答题卡上.

13. 已知实数 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y-4 \leq 0, \\ x-2y+2 \geq 0, \\ y \geq 0. \end{cases}$ 则 $z=x+2y$ 的最大值为_____.

14. 设正项等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_4=81, a_2+a_3=36$, 则 $a_n=_____$.

15. 已知平面向量 a, b 满足 $|a|=2, |b|=\sqrt{3}$, 且 $b \perp (a-b)$, 则向量 a 与 b 的夹角的大小为_____.

16. 已知直线 $y=kx$ 与双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a>0, b>0)$ 相交于不同的两点 A, B , F 为双曲线 C 的左焦点, 且满足 $|AF|=3|BF|, |OA|=b (O$ 为坐标原点), 则双曲线 C 的离心率为_____.

三、解答题: 本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 12 分)

在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $b^2+c^2-a^2=\frac{4\sqrt{2}}{3}bc$.

(I) 求 $\sin A$ 的值;

(II) 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{2}$, 且 $\sqrt{2}\sin B=3\sin C$, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

18. (本小题满分 12 分)

某公司有 1000 名员工, 其中男性员工 400 名, 采用分层抽样的方法随机抽取 100 名员工进行 5G 手机购买意向的调查, 将计划在今年购买 5G 手机的员工称为“追光族”, 计划在明年及明年以后才购买 5G 手机的员工称为“观望者”. 调查结果发现抽取的这 100 名员工中属于“追光族”的女性员工和男性员工各有 20 人.

(I) 完成下列 2×2 列联表, 并判断是否有 95% 的把握认为该公司员工属于“追光族”与“性别”有关;

	属于“追光族”	属于“观望者”	合 计
女性员工			
男性员工			
合 计			100

(II) 已知被抽取的这 100 名员工中有 10 名是人事部的员工, 这 10 名中有 3 名属于“追光族”. 现从这 10 名中随机抽取 3 名, 记被抽取的 3 名中属于“追光族”的人数为随机变量 X , 求 X 的分布列及数学期望.

附: $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$, 其中 $n=a+b+c+d$.

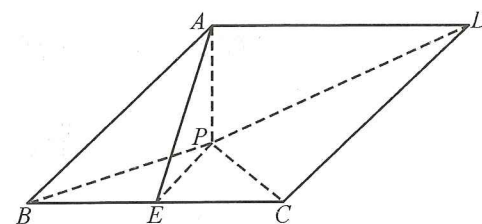
$P(K^2 \geq k_0)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

19. (本小题满分 12 分)

如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $AP \perp$ 平面 PBC , 底面 $ABCD$ 为菱形, 且 $\angle ABC=60^\circ$, E 为 BC 的中点.

(I) 证明: $BC \perp$ 平面 PAE ;

(II) 若 $AB=2, PA=1$, 求平面 ABP 与平面 CDP 所成锐二面角的余弦值.



20. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = (a-1)\ln x + x + \frac{a}{x}, a \in \mathbb{R}$.

(I) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(II) 当 $a < -1$ 时, 证明: $\forall x \in (1, +\infty), f(x) > -a - a^2$.

21. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 的右焦点为 F , 过点 F 的直线 (不与 x 轴重合) 与椭圆 C 相交于 A, B 两点, 直线 $l: x=2$ 与 x 轴相交于点 H , 过点 A 作 $AD \perp l$, 垂足为 D .

(I) 求四边形 $OAHB (O$ 为坐标原点) 面积的取值范围;

(II) 证明直线 BD 过定点 E , 并求出点 E 的坐标.

请考生在第 22, 23 题中任选择一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题记分. 作答时, 用 2B 铅笔在答题卡上把所选题目对应的标号涂黑.

22. (本小题满分 10 分) 选修 4-4: 坐标系与参数方程

在平面直角坐标系 xOy 中, 已知 P 是曲线 $C_1: x^2 + (y-2)^2 = 4$ 上的动点, 将 OP 绕点 O 顺时针旋转 90° 得到 OQ , 设点 Q 的轨迹为曲线 C_2 . 以坐标原点 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系.

(I) 求曲线 C_1, C_2 的极坐标方程;

(II) 在极坐标系中, 点 $M(3, \frac{\pi}{2})$, 射线 $\theta = \frac{\pi}{6} (\rho \geq 0)$ 与曲线 C_1, C_2 分别相交于异于极点

O 的 A, B 两点, 求 $\triangle MAB$ 的面积.

23. (本小题满分 10 分) 选修 4-5: 不等式选讲

已知函数 $f(x) = |x-3|$.

(I) 解不等式 $f(x) \geq 4 - |2x+1|$;

(II) 若 $\frac{1}{m} + \frac{4}{n} = 2 (m>0, n>0)$, 求证: $m+n \geq |x + \frac{3}{2}| - f(x)$.

数 学(文科)

本试卷分选择题和非选择题两部分。第 I 卷(选择题)1 至 2 页,第 II 卷(非选择题)3 至 4 页,共 4 页,满分 150 分,考试时间 120 分钟。

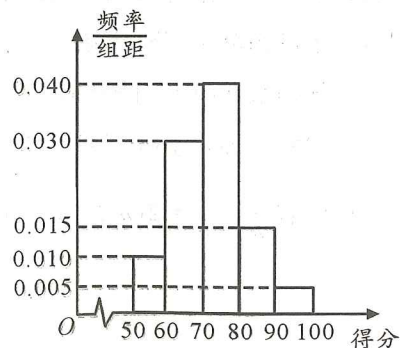
注意事项:

1. 答题前,务必将自己的姓名、考籍号填写在答题卡规定的位置上。
2. 答选择题时,必须使用 2B 铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑,如需改动,用橡皮擦擦干净后,再选涂其它答案标号。
3. 答非选择题时,必须使用 0.5 毫米黑色签字笔,将答案书写在答题卡规定的位置上。
4. 所有题目必须在答题卡上作答,在试题卷上答题无效。
5. 考试结束后,只将答题卡交回。

第 I 卷 (选择题,共 60 分)

一、选择题:本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 若复数 z_1 与 $z_2 = -3 - i$ (i 为虚数单位)在复平面内对应的点关于实轴对称,则 $z_1 =$
(A) $-3 - i$ (B) $-3 + i$ (C) $3 + i$ (D) $3 - i$
2. 已知集合 $A = \{-1, 0, m\}$, $B = \{1, 2\}$. 若 $A \cup B = \{-1, 0, 1, 2\}$, 则实数 m 的值为
(A) -1 或 0 (B) 0 或 1 (C) -1 或 2 (D) 1 或 2
3. 若 $\sin\theta = \sqrt{5}\cos\theta$, 则 $\tan 2\theta =$
(A) $-\frac{\sqrt{5}}{3}$ (B) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ (C) $-\frac{\sqrt{5}}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{5}}{2}$
4. 已知命题 $p: \forall x \in \mathbf{R}, 2^x - x^2 \geq 1$, 则 $\neg p$ 为
(A) $\forall x \notin \mathbf{R}, 2^x - x^2 < 1$ (B) $\exists x_0 \notin \mathbf{R}, 2^{x_0} - x_0^2 < 1$
(C) $\forall x \in \mathbf{R}, 2^x - x^2 < 1$ (D) $\exists x_0 \in \mathbf{R}, 2^{x_0} - x_0^2 < 1$
5. 某校随机抽取 100 名同学进行“垃圾分类”的问卷测试,测试结果发现这 100 名同学的得分都在 $[50, 100]$ 内,按得分分成 5 组: $[50, 60)$, $[60, 70)$, $[70, 80)$, $[80, 90)$, $[90, 100]$, 得到如图所示的频率分布直方图. 则这 100 名同学的得分的中位数为
(A) 72.5 (B) 75 (C) 77.5 (D) 80



6. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $a_n \neq 0$. 若 $a_5 = 3a_3$, 则 $\frac{S_9}{S_5} =$

(A) $\frac{9}{5}$ (B) $\frac{5}{9}$ (C) $\frac{5}{3}$ (D) $\frac{27}{5}$

7. 已知 α, β 是空间中两个不同的平面, m, n 是空间中两条不同的直线, 则下列说法正确的是

(A) 若 $m \parallel \alpha, n \parallel \beta$, 且 $\alpha \parallel \beta$, 则 $m \parallel n$
(B) 若 $m \parallel \alpha, n \parallel \beta$, 且 $\alpha \perp \beta$, 则 $m \parallel n$
(C) 若 $m \perp \alpha, n \parallel \beta$, 且 $\alpha \parallel \beta$, 则 $m \perp n$
(D) 若 $m \perp \alpha, n \parallel \beta$, 且 $\alpha \perp \beta$, 则 $m \perp n$

8. 将函数 $y = \sin(4x - \frac{\pi}{6})$ 图象上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍(纵坐标不变), 再把所得

得图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 得到函数 $f(x)$ 的图象, 则函数 $f(x)$ 的解析式为

(A) $f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{6})$ (B) $f(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{3})$

(C) $f(x) = \sin(8x + \frac{\pi}{6})$ (D) $f(x) = \sin(8x - \frac{\pi}{3})$

9. 已知抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点为 F , M, N 是抛物线上两个不同的点. 若 $|MF| + |NF| = 5$, 则线段 MN 的中点到 y 轴的距离为

(A) 3 (B) $\frac{3}{2}$ (C) 5 (D) $\frac{5}{2}$

10. 已知 $a = 2^{\frac{1}{2}}, b = 3^{\frac{1}{3}}, c = \ln \frac{3}{2}$, 则

(A) $a > b > c$ (B) $a > c > b$ (C) $b > a > c$ (D) $b > c > a$

11. 已知直线 $y = kx$ 与双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 相交于不同的两点 A, B , F 为双

曲线 C 的左焦点, 且满足 $|AF| = 3|BF|$, $|OA| = b$ (O 为坐标原点), 则双曲线 C 的离心率为

(A) $\sqrt{2}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) 2 (D) $\sqrt{5}$

12. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(2-x) = f(2+x)$, 当 $x \leq 2$ 时, $f(x) = xe^x$. 若关于 x 的方程 $f(x) = k(x-2) + 2$ 有三个不相等的实数根, 则实数 k 的取值范围是

(A) $(-1, 0) \cup (0, 1)$ (B) $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$
(C) $(-e, 0) \cup (0, e)$ (D) $(-e, 0) \cup (e, +\infty)$

第 II 卷 (非选择题, 共 90 分)

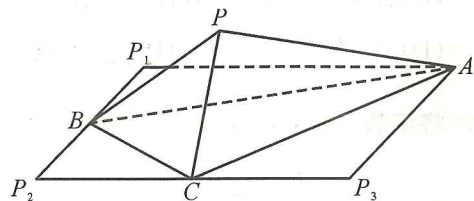
二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 把答案填在答题卡上.

13. 已知实数 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y-4 \leq 0, \\ x-2y+2 \geq 0, \\ y \geq 0. \end{cases}$ 则 $z=x+2y$ 的最大值为 _____.

14. 设正项等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_4=81, a_2+a_3=36$, 则 $a_n=$ _____.

15. 已知平面向量 a, b 满足 $|a|=2, |b|=\sqrt{3}$, 且 $b \perp (a-b)$, 则向量 a 与 b 的夹角的大小为 _____.

16. 如图, 在边长为 2 的正方形 $AP_1P_2P_3$ 中, 边 P_1P_2, P_2P_3 的中点分别为 B, C . 现将 $\triangle AP_1B, \triangle BP_2C, \triangle CP_3A$ 分别沿 AB, BC, CA 折起使点 P_1, P_2, P_3 重合, 重合后记为点 P , 得到三棱锥 $P-ABC$. 则三棱锥 $P-ABC$ 的外接球体积为 _____.



三、解答题: 本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 12 分)

在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $b^2+c^2-a^2=\frac{4\sqrt{2}}{3}bc$.

(I) 求 $\sin A$ 的值;

(II) 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{2}$, 且 $\sqrt{2}\sin B=3\sin C$, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

18. (本小题满分 12 分)

某公司有 1000 名员工, 其中男性员工 400 名, 采用分层抽样的方法随机抽取 100 名员工进行 5G 手机购买意向的调查, 将计划在今年购买 5G 手机的员工称为“追光族”, 计划在明年及明年以后才购买 5G 手机的员工称为“观望者”. 调查结果发现抽取的这 100 名员工中属于“追光族”的女性员工和男性员工各有 20 人.

(I) 完成下列 2×2 列联表, 并判断是否有 95% 的把握认为该公司员工属于“追光族”与“性别”有关;

	属于“追光族”	属于“观望者”	合 计
女性员工			
男性员工			
合 计			100

(II) 已知被抽取的这 100 名员工中有 6 名是人事部的员工, 这 6 名中有 3 名属于“追光族”. 现从这 6 名中随机抽取 3 名, 求抽取到的 3 名中恰有 1 名属于“追光族”的概率.

附: $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$, 其中 $n=a+b+c+d$.

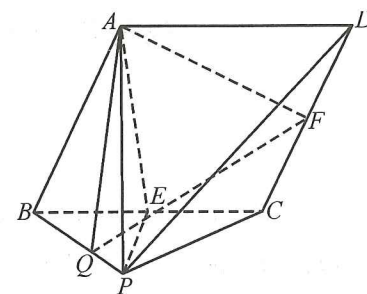
$P(K^2 \geq k_0)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

19. (本小题满分 12 分)

如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $AP \perp$ 平面 PBC , 底面 $ABCD$ 为菱形, 且 $\angle ABC = 60^\circ$, E, F 分别为 BC, CD 的中点.

(I) 证明: $BC \perp$ 平面 PAE ;

(II) 点 Q 在棱 PB 上, 且 $\frac{PQ}{PB} = \frac{1}{3}$. 证明: $PD \parallel$ 平面 QAF .



20. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = (a-1)\ln x + x + \frac{a}{x}$, $a \in \mathbf{R}$, $f'(x)$ 为函数 $f(x)$ 的导函数.

(I) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(II) 当 $a=2$ 时, 证明 $f(x) - f'(x) \leq x + \frac{2}{x}$ 对任意的 $x \in [1, 2]$ 都成立.

21. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 的右焦点为 F , 过点 F 的直线(不与 x 轴重合)与椭圆 C 相交于 A, B 两点, 直线 $l: x=2$ 与 x 轴相交于点 H , E 为线段 FH 的中点, 直线 BE 与直线 l 的交点为 D .

(I) 求四边形 $OAHB$ (O 为坐标原点) 面积的取值范围;

(II) 证明直线 AD 与 x 轴平行.

请考生在第 22, 23 题中任选择一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题记分. 作答时, 用 2B 铅笔在答题卡上把所选题目对应的标号涂黑.

22. (本小题满分 10 分) 选修 4-4: 坐标系与参数方程

在平面直角坐标系 xOy 中, 已知 P 是曲线 $C_1: x^2 + (y-2)^2 = 4$ 上的动点, 将 OP 绕点 O 顺时针旋转 90° 得到 OQ , 设点 Q 的轨迹为曲线 C_2 . 以坐标原点 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系.

(I) 求曲线 C_1, C_2 的极坐标方程;

(II) 在极坐标系中, 点 $M(3, \frac{\pi}{2})$, 射线 $\theta = \frac{\pi}{6}$ ($\rho \geq 0$) 与曲线 C_1, C_2 分别相交于异于极点

O 的 A, B 两点, 求 $\triangle MAB$ 的面积.

23. (本小题满分 10 分) 选修 4-5: 不等式选讲

已知函数 $f(x) = |x-3|$.

(I) 解不等式 $f(x) \geq 4 - |2x+1|$;

(II) 若 $\frac{1}{m} + \frac{4}{n} = 2$ ($m > 0, n > 0$), 求证: $m+n \geq |x + \frac{3}{2}| - f(x)$.