2018 年普通高等学校招生全国统一考试
理科数学

一、　选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A=\{x \mid x-1\geqslant 0\}$，$B=\{0，1，2\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{0\}$

B. $\{1\}$

C. $\{1，2\}$

D. $\{0，1，2\}$

2. $(1+i)(2-i)=$

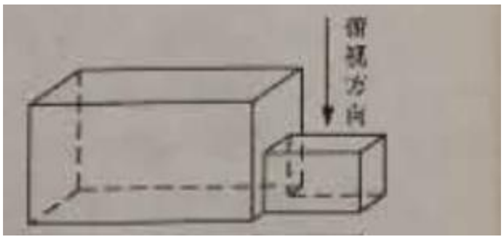
A. $-3-i$

B. $-3+i$

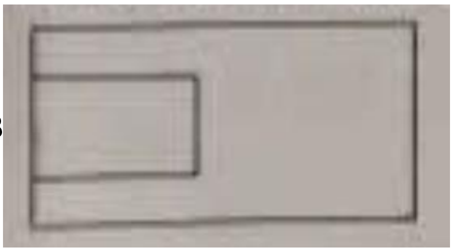
C. $3-i$

D. $3+i$

3. 中国古建筑借助榫卯将木构件连接起来，构件的凸出部分叫榫头，凹进部分叫卯眼，图中木构件右边的小长方体是榫头。若如图摆放的木构件与某一带卯眼的木构件咬合成长方体，则咬合时带卯眼的木构件的俯视图可以是



A 

B 

C. 

D. 

4. 若 $\sin a=\frac{1}{3}$，则 $\cos 2a=$

A. $\frac{8}{9}$

B. $\frac{7}{9}$

C. $-\frac{7}{9}$

D. $-\frac{8}{9}$

5. $(x^2+\frac{2}{x})^5$ 的展开式中 x^5 的系数为

A. 10

B. 20

C. 40

D. 80

6. 直线 x+y+2=0 分别与 x 轴，y 交于 A，. 两点，点 P 在圆（x−2）^{2}+y^2=2 上，则 ΔABP 面积的取值范围是

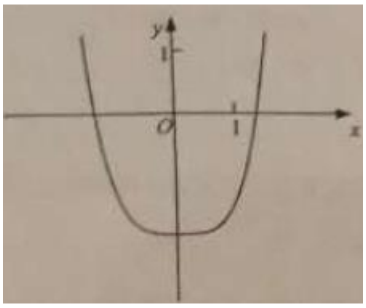
A. [2，6]

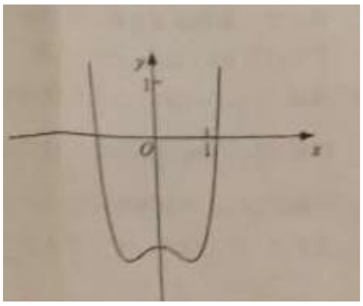
B. [4，8]

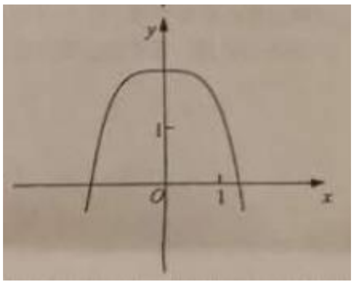
C. $[\sqrt{2},3\sqrt{2}]$

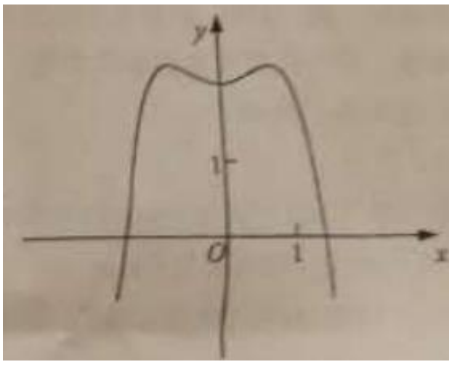
D. $[2\sqrt{2},3\sqrt{2}]$

7. 函数 $y=-x^4+x^2+2$ 的图像大致为

A. 

B. 

C. 

D. 

8. 某群体中的每位成员使用移动支付的概率都为 p，各成员的支付方式相互独立，设 X 为该群体的 10 位成员中使用移动支付的人数，DX=2.4，P（X=4）<P（X=6），则 P=

A. 0.7

B. 0.6

C. 0.4

D. 0.3

9. ΔABC 的内角 A，B，C 的对便分别为 a，b，c，若ΔABC 的面积为 $\frac{a^2+b^2-c^2}{4}$，则 C=

A. $\frac{\pi}{2}$

B. $\frac{\pi}{3}$

C. $\frac{\pi}{4}$

D. $\frac{\pi}{6}$

10.设 A，B，C，D 是同一个半径为 4 的球的球面上四点，△ABC 为等边三角形且其面积为 $9\sqrt{3}$，则三棱锥 D-ABC 体积的最大值为

A.12 $\sqrt{3}$

B.18 $\sqrt{3}$

C.24 $\sqrt{3}$

D.54 $\sqrt{3}$

11. 设 F_1、F_2是双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0, b>0)$ 的左、右焦点，O 是坐标原点，过 F2 作 C 的一条渐近线的垂线，垂足为 P，若 $|PF_1|=\sqrt{6}|OP|$，则 C 的离心率为

A. $\sqrt{5}$

B. 2

C. $\sqrt{3}$

D. $\sqrt{2}$

12. 设 $a=\log_{0.2}0.3$，$b=\log_2 0.3$，则
A. a+b<ab<0
B. ab<a+b<0
C. a+b<0<ab
D. ab<0<a+b
二、填空题，本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。
13、已知向 a=（1，2），b=（2，-2），c=（1，λ），若 c//（2a+b），则 λ =___________
14. 曲线 y=（ax+1）e^x 在点（0，1）处的切线的斜率为-2，则 a=_________。
15. 函数 $f(x)=cos(3x+\frac{\pi}{6})$ 在[0，π]的零点个数为______。
16，已知点 M（-1，1）和抛物线 C：$y^2=4x$，过 C 的焦点且斜率为 k 的直线与 C 交于 A，B 两点，若∠AMB=90°，则 k=______。
三、解答题：共 70 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。第 17-21 题为必考题，每个试题考生都必须作答，第 22、23、题为选靠题，考生根据要求作答。
（一）必考题：共 60 分。
17、（12 分）

等比数列{a_n}中，a_n=1，a_n=4a_n。

（1）求{a_n}的递项公式；

（2）记 S_n 为{a_n}的前 n 项和，若 S_n=63，求 m。

18、（12 分）

某工厂为提高生活效率，开展技术创新活动，提出了完成某项生产任务的两种新的生产方式，为比较两种生产方式的效率，选取 40 名工人，将他们随机分成两组，每组 20 人，第一组工人用第一种生产方式，第二组工人用第二种生产方式，根据工人完成生产任务的工作时间（单位：min）绘制了如下茎叶图：

第一种生产方式		第二种生产方式
8	6	5 5 6 8 9
9 7 6 2	7	0 1 2 2 3 4 5 6 6 8
9 8 7 7 6 5 4 3 3 2	8	1 4 4 5
2 1 1 0 0	9	0

（1）根据茎叶图判断哪种生产力的效率更高？并说明理由。

（2）求 40 名工人完成生产任务所需时间的中位数 m，并将完成生产任务所需时间超过 m 和不超过 m 的工人数填入下面的列联表。

	超过 m	不超过 m
第一种生产方式		
第二种生产方式		

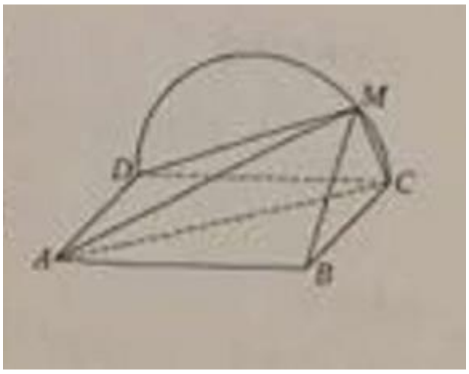
（3）根据（2）中的列联表，能否有 99%的把握认为两种生产方式的效率有差异？

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，

$P(K^2\geqslant k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

19.（12 分）

如图，边长为 2 的正方形 ABCD 所在的平面与半圆弧 $\overset{\frown}{CD}$ 所在平面垂直，M 是 $\overset{\frown}{CD}$ 上异于 C，D 的点。



（1） 证明：平面 AMD 上平面 BMC；

（2） 当三棱锥 M-ABC 体积最大时，求面 MAB 与面 MCD 所成二面角的正弦值。

20.（12 分）

已知斜率为 k 的直线 l 与椭圆 $C:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 交于 A，B 两点，线段 AB 的中点为 M（1，m）（m>0）。

（1）证明：k<$-\dfrac{1}{2}$；

（2）设 F 为 C 的右焦点，P 为 C 上一点，且 $\overrightarrow{FP}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}=0$，证明：$|\overrightarrow{FA}|$，$|\overrightarrow{FP}|$，$|\overrightarrow{FB}|$ 成等差数列,并求该数列的公差。

21.（12 分）

已知函数 $f(x)=(2+x+ax^2)\ln(1+x)-2x$.

（1）若 a=0，证明：当 $-1<x<0$ 时，$f(x)<0$；当 $x>0$ 时，$f(x)>0$；

（2）若 x=0 是 f（x）的最大值点，求 a

（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多选，则按所做的第一题计分。

22. ［选修 4-4：坐标系与参数方程］（10 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，⊙O 的参数方程为 $\begin{cases} x=\cos\theta \\ y=\sin\theta \end{cases}$，（θ 为参数），过点（0，$-\sqrt{2}$），且倾斜角为 α 的直线 l 与⊙O 交于 A、B 两点。

（1）求 α 的取值范围；

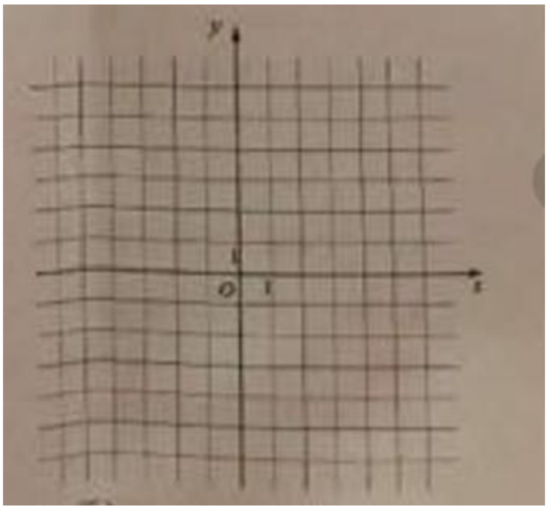
（2）求 AB 中点 P 的轨迹的参数方程。

23. ［选修 4-5：不等式选讲］（10 分）

设函数 f（x）=｜2x+1｜+｜x-1｜。

（1）画出 y= f（x）的图像；

（2）当 x∈［0，-∞）时，f（x）≤ax+b，求 a+b 的最小值。



理科数学试题参考答案

一、选择题

1. C	2. D	3. A	4. B	5. C	6. A
7. D	8. B	9. C	10. B	11. C	12. B

二、填空题

13. $\frac{1}{2}$　14. -3　15. 3　16. 2

三、解答题

17. 解：

（1）设$\{a_n\}$的公比为q，由题设得 $a_n=q^{n-1}$.

由已知得 $q^4=4q^2$，解得$q=0$（舍去），$q=-2$或$q=2$.

故$a_n=(-2)^{n-1}$ 或 $a_n=2^{n-1}$.

（2）若$a_n=(-2)^{n-1}$，则$S_n=\frac{1-(-2)^n}{3}$. 由$S_m=63$得$(-2)^m=-188$，此方程没有正整数解.

若$a_n=2^{n-1}$，则$S_n=2^n-1$. 由$S_m=63$得 $2^m=64$，解得$m=6$.

综上，$m=6$.

18. **解**:

（1）第二种生产方式的效率更高.

理由如下:

（ⅰ）由茎叶图可知：用第一种生产方式的工人中，有75%的工人完成生产任务所需时间至少80分钟，用第二种生产方式的工人中，有75%的工人完成生产任务所需时间至多79分钟. 因此第二种生产方式的效率更高.

（ⅱ）由茎叶图可知：用第一种生产方式的工人完成生产任务所需时间的中位数为85.5分钟，用第二种生产方式的工人完成生产任务所需时间的中位数为73.5分钟. 因此第二种生产方式的效率更高.

（ⅲ）由茎叶图可知：用第一种生产方式的工人完成生产任务平均所需时间高于80分钟；用第二种生产方式的工人完成生产任务平均所需时间低于80分钟. 因此第二种生产方式的效率更高.

（ⅳ）由茎叶图可知：用第一种生产方式的工人完成生产任务所需时间分布在茎8上的最多，关于茎8大致呈对称分布；用第二种生产方式的工人完成生产任务所需时间分布在茎7上的最多，关于茎7大致呈对称分布. 又用两种生产方式的工人完成生产任务所需时间分布的区间相同，故可以认为用第二种生产方式完成生产任务所需的时间比用第一种生产方式完成生产任务所需的时间更少. 因此第二种生产方式的效率更高.

以上给出了4种理由，考生答出其中任意一种或其他合理理由均可得分.

（2）由茎叶图知 $m=\dfrac{79+81}{2}=80$.

列联表如下:

	超过 m	不超过 m
第一种生产方式	15	5
第二种生产方式	5	15

（3）由于 $K^2=\dfrac{40(15\times15-5\times5)^2}{20\times20\times20\times20}=10>6.635$，所以有99%的把握认为两种生产方式的效率有差异.

19. 解:

（1）由题设知，平面 $CMD\perp$ 平面 $ABCD$，交线为 CD. 因为 $BC\perp CD$，$BC\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $BC\perp$ 平面 CMD，故 $BC\perp DM$.

因为 M 为 $\overset{\frown}{CD}$ 上异于 C，D 的点，且 DC 为直径，所以 $DM\perp CM$.

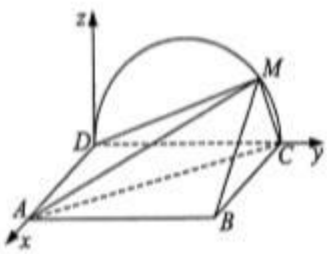
又 $BC\cap CM=C$，所以 $DM\perp$ 平面 BMC.

而 $DM\subset$ 平面 AMD，故平面 $AMD\perp$ 平面 BMC.

（2）以 D 为坐标原点，$\overrightarrow{DA}$ 的方向为 x 轴正方向，建立如图所示的空间直角坐标系 $D-xyz$.

当三棱锥 $M-ABC$ 体积最大时，M 为 $\overset{\frown}{CD}$ 的中点. 由题设得

$D(0,0,0)$, $A(2,0,0)$, $B(2,2,0)$, $C(0,2,0)$, $M(0,1,1)$,



$\overrightarrow{AM}=(-2,1,1)$, $\overrightarrow{AB}=(0,2,0)$, $\overrightarrow{DA}=(2,0,0)$.

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 是平面 MAB 的法向量，则

$$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AM}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0,\end{cases} \quad 即 \quad \begin{cases}-2x+y+z=0,\\ 2y=0.\end{cases}$$

可取 $\boldsymbol{n}=(1,0,2)$.

$\overrightarrow{DA}$ 是平面 MCD 的法向量，因此

$$\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{DA}\rangle=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DA}}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{DA}|}=\frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\sin\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{DA}\rangle=\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

所以面 MAB 与面 MCD 所成二面角的正弦值是 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

20．解：

（1）设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $\frac{x_1^2}{4}+\frac{y_1^2}{3}=1$，$\frac{x_2^2}{4}+\frac{y_2^2}{3}=1$．

两式相减，并由 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=k$ 得

$$\frac{x_1+x_2}{4}+\frac{y_1+y_2}{3}\cdot k=0.$$

由题设知 $\frac{x_1+x_2}{2}=1$，$\frac{y_1+y_2}{2}=m$，于是

$$k=-\frac{3}{4m}. \quad ①$$

由题设得 $0<m<\frac{3}{2}$，故 $k<-\frac{1}{2}$．

（2）由题意得 $F(1,0)$．设 $P(x_3,y_3)$，则

$$(x_3-1,y_3)+(x_1-1,y_1)+(x_2-1,y_2)=(0,0).$$

由（1）及题设得 $x_3=3-(x_1+x_2)=1$，$y_3=-(y_1+y_2)=-2m<0$．

又点 P 在 C 上，所以 $m=\frac{3}{4}$，从而 $P(1,-\frac{3}{2})$，$|\overrightarrow{FP}|=\frac{3}{2}$．

于是

$$|\overrightarrow{FA}|=\sqrt{(x_1-1)^2+y_1^2}=\sqrt{(x_1-1)^2+3(1-\frac{x_1^2}{4})}=2-\frac{x_1}{2}.$$

同理 $|\overrightarrow{FB}|=2-\frac{x_2}{2}$．

所以 $|\overrightarrow{FA}|+|\overrightarrow{FB}|=4-\frac{1}{2}(x_1+x_2)=3$.

故 $2|\overrightarrow{FP}|=|\overrightarrow{FA}|+|\overrightarrow{FB}|$，即 $|\overrightarrow{FA}|$，$|\overrightarrow{FP}|$，$|\overrightarrow{FB}|$ 成等差数列.

设该数列的公差为 d，则

$$2|d|=\left||\overrightarrow{FB}|-|\overrightarrow{FA}|\right|=\frac{1}{2}|x_1-x_2|=\frac{1}{2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}. \quad ②$$

将 $m=\frac{3}{4}$ 代入①得 $k=-1$.

所以 l 的方程为 $y=-x+\frac{7}{4}$，代入 C 的方程，并整理得 $7x^2-14x+\frac{1}{4}=0$.

故 $x_1+x_2=2$，$x_1x_2=\frac{1}{28}$，代入②解得 $|d|=\frac{3\sqrt{21}}{28}$.

所以该数列的公差为 $\frac{3\sqrt{21}}{28}$ 或 $-\frac{3\sqrt{21}}{28}$.

21．解：

（1）当 $a=0$ 时，$f(x)=(2+x)\ln(1+x)-2x$，$f'(x)=\ln(1+x)-\frac{x}{1+x}$.

设函数 $g(x)=f'(x)=\ln(1+x)-\frac{x}{1+x}$，则 $g'(x)=\frac{x}{(1+x)^2}$.

当 $-1<x<0$ 时，$g'(x)<0$；当 $x>0$ 时，$g'(x)>0$．故当 $x>-1$ 时，$g(x)\geqslant g(0)=0$，且仅当 $x=0$ 时，$g(x)=0$，从而 $f'(x)\geqslant 0$，且仅当 $x=0$ 时，$f'(x)=0$.

所以 $f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 单调递增.

又 $f(0)=0$，故当 $-1<x<0$ 时，$f(x)<0$；当 $x>0$ 时，$f(x)>0$.

(2)(ⅰ)若 $a\geqslant 0$，由(1)知，当 $x>0$ 时，$f(x)\geqslant(2+x)\ln(1+x)-2x>0=f(0)$，这与 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点矛盾.

(ⅱ)若 $a<0$，设函数 $h(x)=\dfrac{f(x)}{2+x+ax^2}=\ln(1+x)-\dfrac{2x}{2+x+ax^2}$.

由于当 $|x|<\min\{1,\sqrt{\dfrac{1}{|a|}}\}$ 时，$2+x+ax^2>0$，故 $h(x)$ 与 $f(x)$ 符号相同.

又 $h(0)=f(0)=0$，故 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点当且仅当 $x=0$ 是 $h(x)$ 的极大值点.

$$
\begin{aligned}
h'(x)&=\frac{1}{1+x}-\frac{2(2+x+ax^2)-2x(1+2ax)}{(2+x+ax^2)^2}\\
&=\frac{x^2(a^2x^2+4ax+6a+1)}{(x+1)(ax^2+x+2)^2}.
\end{aligned}
$$

如果 $6a+1>0$，则当 $0<x<-\dfrac{6a+1}{4a}$，且 $|x|<\min\{1,\sqrt{\dfrac{1}{|a|}}\}$ 时，$h'(x)>0$，故 $x=0$ 不是 $h(x)$ 的极大值点.

如果 $6a+1<0$，则 $a^2x^2+4ax+6a+1=0$ 存在根 $x_1<0$，故当 $x\in(x_1,0)$，且 $|x|<\min\{1,\sqrt{\dfrac{1}{|a|}}\}$ 时，$h'(x)<0$，所以 $x=0$ 不是 $h(x)$ 的极大值点.

如果 $6a+1=0$，则 $h'(x)=\dfrac{x^3(x-24)}{(x+1)(x^2-6x-12)^2}$. 则当 $x\in(-1,0)$ 时，$h'(x)>0$；当 $x\in(0,1)$ 时，$h'(x)<0$. 所以 $x=0$ 是 $h(x)$ 的极大值点，从而 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点.

综上，$a=-\dfrac{1}{6}$.

22．解：

（1）$\odot O$ 的直角坐标方程为 $x^2+y^2=1$．

当 $\alpha=\frac{\pi}{2}$ 时，l 与 $\odot O$ 交于两点．

当 $\alpha\neq\frac{\pi}{2}$ 时，记 $\tan\alpha=k$，则 l 的方程为 $y=kx-\sqrt{2}$．l 与 $\odot O$ 交于两点当且仅当 $|\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+k^2}}|<1$，解得 $k<-1$ 或 $k>1$，即 $\alpha\in(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$ 或 $\alpha\in(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4})$．

综上，α 的取值范围是 $(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4})$．

（2）l 的参数方程为 $\begin{cases}x=t\cos\alpha,\\ y=-\sqrt{2}+t\sin\alpha\end{cases}$（$t$ 为参数，$\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{3\pi}{4}$）．

设 A，B，P 对应的参数分别为 t_A，t_B，t_P，则 $t_P=\frac{t_A+t_B}{2}$，且 t_A，t_B 满足

$$t^2-2\sqrt{2}\,t\sin\alpha+1=0\,.$$

于是 $t_A+t_B=2\sqrt{2}\sin\alpha$，$t_P=\sqrt{2}\sin\alpha$．又点 P 的坐标 (x,y) 满足

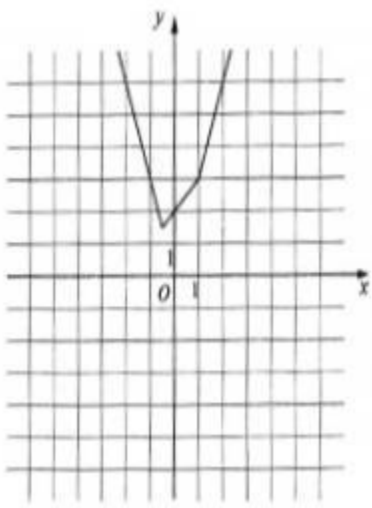
$$\begin{cases}x=t_P\cos\alpha,\\ y=-\sqrt{2}+t_P\sin\alpha.\end{cases}$$

所以点 P 的轨迹的参数方程是

$$\begin{cases}x=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin2\alpha,\\ y=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos2\alpha\end{cases}\quad（\alpha 为参数，\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{3\pi}{4}）.$$

23．解：

（1）$f(x)=\begin{cases}-3x, & x<-\frac{1}{2},\\ x+2, & -\frac{1}{2}\leqslant x<1,\\ 3x, & x\geqslant1.\end{cases}$



$y=f(x)$ 的图像如图所示．

（2）由（1）知，$y=f(x)$ 的图像与 y 轴交点的纵坐标为 2，且各部分所在直线斜率的最大值为 3，故当且仅当 $a\geqslant3$ 且 $b\geqslant2$ 时，$f(x)\leqslant ax+b$ 在 $[0,+\infty)$ 成立，因此 $a+b$ 的最小值为 5.